Differenzialgleichungen

Eine Gleichung, in der die gesuchte Funktion als Ableitung vorkommt heißt DGL.

Klassifikation:

- Gewöhnlich: DGL mit nur 1 unabhängigen Variablen. (z.B. t)
- Linear: DGL ist linear in $x, \dot{x}, \ddot{x}$, usw.
- Ordnung: Höchste vorkommende Ableitung.

Lösungsverfahren:

Annahme: alle beteiligten Fkt sind stetig auf dem betrachteten Intervall.

$\boxed{1.}$ homogenes Anfangswertproblem 1. Ordnung:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) \quad ; \; x(t_0) = x_0$$

Lösbar durch Separation der Variablen:

$$\dot{x} = a(t)x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = a(t)x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{x(t)} = a(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'(t)} = \int_{t_0}^{t} dt' a(t')$$

$$\Rightarrow \ln x(t) - \ln x_0 = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dt' a(t')}_{=A(t)}$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = x_0 e^{A(t)}}$$

Quellen: Lang/Pucker, Mathematische Methoden in der Physik; Spektrum Akademischer Verlag, 1998

$\boxed{2.}$ inhomogenes AWP 1. Ordnung:

$$\dot{x} = a(t)x(t) + b(t) \;;\; x(t_0) = x_0$$

Lösungsmethode: Variation der Konstanten

- Ansatz wie im homogenen Fall, jedoch mit variablem Faktor: $x_0 \longrightarrow \alpha(t)$ mit $\alpha(t_0) = x_0$.

$$\Rightarrow x(t) = \underset{\downarrow \atop \text{noch zu bestimmen}}{\alpha(t)} \exp\Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t} dt' a(t')}_{A(t)}\Big)$$

Eingesetzt in die DGL $\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}(t) e^{A(t)} + \alpha(t) \dot{A}(t) e^{A(t)} = a(t)\alpha(t) e^{A(t)} + b(t)$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow a(t)$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}(t) e^{A(t)} = b(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}(t) = b(t) e^{-A(t)}$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \, b(t') e^{-A(t')}$$

Damit ergibt sich die Lösung

$$x(t) = \underbrace{x_0 e^{A(t)}}_{\text{Lsg d. homogenen AWP}} + \int_{t_0}^{t} dt' \, b(t') e^{A(t) - A(t')}$$

mit $A(t) = \int_{t_0}^{t} dt' a(t')$

3 homogene lineare DGL 2. Ordnung:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0$$

Diese DGL hat genau 2 linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ (zur Definition „linear unabhängig" kann man in 'nem Mathebuch unter Wronski-Determinante nachschauen, aber hier nicht so wichtig...)

Da die DGL linear ist, ist natürlich auch jede Superposition von x_1 und x_2 Lösung der DGL. Deshalb nennt man diese ~~...~~ beiden Lösungen auch ein Fundamentalsystem der DGL (vergleichbar mit einer Basis eines Vektorraumes).

$\Rightarrow x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ löst die DGL

Ein Anfangswertproblem mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ hat eine eindeutige Lösung $\Rightarrow$ Damit lassen sich C_1 und C_2 bestimmen.

Lösungsweg: $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2} x + \alpha \frac{d}{dx} x + \beta x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta\right) x = 0$$

$$\overset{D = \frac{d}{dx}}{\Longleftrightarrow} (D^2 + \alpha D + \beta) x = 0$$

Satz von Vieta

$$\Leftrightarrow (D - a)(D - b)\cancel{x} = 0$$

„charakteristische Gleichung"

Da sowohl $(D-a)(D-b)x=0$

als auch $(D-b)(D-a)x=0$

gelten muss, lösen auch die Lösungen der DGLs 1. Ordnung

$$(D-a)x_1(t)=0 \quad \Rightarrow x_1(t)=e^{at}$$

$$(D-b)x_2(t)=0 \quad \Rightarrow x_2(t)=e^{bt}$$

die ganze DGL.

Für $a \neq b$ bilden (e^{at}, e^{bt}) das Fundamentalsystem.

Für $a=b$ bilden die Funktionen $(e^{at}, t \cdot e^{at})$ das Fundamentalsystem.

Für eine homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten können wir also immer den Ansatz

$$e^{i\omega t} \quad \text{bzw.} \quad e^{\lambda t}$$

(je nachdem ob wir Schwingungslösungen erwarten, letztlich aber egal) wählen und die quadratische Gleichung für ω bzw. λ lösen.

Erhalten wir zwei verschiedene ω, ist die allgemeine Lösung $x(t)=a e^{i\omega_1 t}+b e^{i\omega_2 t}$,

ansonsten $x(t)=a e^{i\omega_1 t}+b t e^{i\omega_1 t}$

(entsprechend für λ).